数理解析研究所講究録
第1952巻 2015年 81-85

Gaussian concentration for the lower tail in first-passage percolation under low moments

日本大学理工学部　久保田　直樹 *
Naoki Kubota
College of Science and Technology,
Nihon University

Abstract

本稿では，2014年12月16日から19日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに，ファーストパッセージパーコレーションにおける concentration inequality について，その概要を述べる．また，本研究を応用し，ファーストパッセージパーコレーションの convergence rate に対する考察を行う．

1 Model and main results

2014年12月16日から19日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに，本稿では「ファーストパッセージパーコレーションにおける concentration inequality」について，著者が Michael Damron 氏 (Indiana University) と共同で行った研究の概要を述べる．詳細については [4] を参照されたい．

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において，ある木で病気が発症したとする．病気の伝染は隣接する4本の木にのみ起こり，その確率は独立に p ずつであるとする．このとき，「ある木で発症した病気が，果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが，パーコレーションである．これに関連して，Hammersley–Welsh [5] によって導入された "ファーストパッセージパーコレーション" がある．ファーストパッセージパーコレーションでは，ある木 a からそれに隣接する木 b にはランダムな時間 $t_{\{a,b\}}$ で病気が伝染するとする．このモデルでは，「ある範囲まで病気が広がる時間と，その感染経路」を問題として扱う．今回，このファーストパッセージパーコレーションに対し，ある範囲

* E-mail address: kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

まで病気が伝染する最短の時間の挙動を評価した.

まず最初に，ファーストパッセージパーコレーションについてより詳しく説明を行う．$\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ の辺集合とし，weights $(t_e)_{e\in\mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列とする．($\mathbb{Z}^d$ の各頂点を果樹園の樹木，t_e を隣接する木へ病気が伝染する時間とみなせる．) このとき，$\mathbb{Z}^d$ の辺を「$e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_l$」と辿る経路 π において，その passage time を

$$\tau(\pi) := \sum_{i=1}^{l} t_{e_i}$$

で定義する．さらに，$\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への first passage time を以下で定義する:

$$\tau(x,y) := \inf\{\tau(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路}\}.$$

ここで，仮定をいくつか導入しておく.

(A0) $\mathbb{P}(t_e = 0) < p_c$. ただし，$p_c$ は $\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションに対する臨界確率である.

(A1) ある $\alpha > 0$ が存在して，$\mathbb{E}[e^{\alpha t_e}] < \infty$.

(A2) ある $\alpha > 0$ が存在して，$\mathbb{E}[t_e^{2/d+\alpha}] < \infty$.

(A3) ある $\alpha > 0$ が存在して，$\mathbb{E}[t_e^{1/(2d)+\alpha}] < \infty$.

上記の weights に対するモーメント条件は「(A1) $\Rightarrow$ (A2)$\Rightarrow$ (A3)」の順で弱くなっている.

仮定 (A3) が成り立つならば，Cox–Durrett [3] によって $\mathbb{E}[\tau(0,x)] < \infty$ であることが示されている．さらに，first passage time は subadditivity を満たすことに注意する．すなわち，

$$\tau(x,z) \leq \tau(x,y) + \tau(y,z), \qquad x,y,z \in \mathbb{Z}^d.$$

したがって subadditive ergodic theorem より，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して次の極限 $\mu(x)$ が存在することが分かる:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tau(0,nx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[\tau(0,nx)] = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\mathbb{E}[\tau(0,nx)] = \mu(x) \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1.1}$$

この極限 $\mu(x)$ を time constant と呼ぶ.

$\mathbb{E}[\tau(0,x)]$ の漸近挙動を詳しく知るためには，$\mathbb{E}[\tau(0,x)] - \mu(x)$ の誤差 (non-random fluctuations) がどの程度かを詳しく解析する必要がある．仮定 (A0) と (A1) の下では，

Alexander [2, Theorem 4.1] による次の先行結果がある:

(1.2) $$0 \le \mathbb{E}[\tau(0,x)] - \mu(x) \le C\|x\|_1^{1/2} \log \|x\|_1, \qquad x \in \mathbb{Z}^d,\ \|x\|_1 > 1.$$

最初に non-random fluctuations の評価を導出したのは Kesten [7, (3.2)] であったが，その評価は次元が高くなるにつれて粗くなってしまうものであった．その後，Alexander によって上記のように精密化された．しかし，non-random fluctuations に対する評価 (1.2) も最適でないと考えられている．特に，$d=2$ のとき主要項 $\|x\|_1$ の指数は KPZ スケーリング 1/3 で，それは次元とともに減少していくと予想されている．近年，ファーストパッセージパーコレーションの研究は著しく進展しているが，現段階ではこの問題を解決へ導く有効な手法は編み出されていない．そこで，Alexander の結果に対して異なる方向からアプローチし，先行研究に対して仮定の一般化と評価の精密化を試みた．

(1.1) は仮定 (A3) だけで成立していることから，Alexander の結果も (A1) より弱いモーメント条件の下で成り立つと予想できる．そこで，モーメント条件を弱めた場合の non-random fluctuations について Damron 氏と共同研究を行い，以下の結果を得ることができた [4].

Theorem 1.1. (A0) と (A2) を仮定する．このとき，ある定数 $C>0$ が存在し，すべての $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$0 \le \mathbb{E}[\tau(0,x)] - \mu(x) \le C(\|x\|_1 \log \|x\|)^{1/2}.$$

Alexander の結果 (1.2) と比較すると，モーメント条件を (A1) から (A2) へ弱めることに成功しただけでなく，logarithmic term の指数も 1/2 に改良されていることが分かる．この様な改良に成功した理由としては，random fluctuations $\tau(0,x) - \mathbb{E}[\tau(0,x)]$ に対する精密な評価を得られたことが挙げられる．特に concentration inequality と呼ばれる次の評価により，Theorem 1.1 の non-random fluctuations が導出される．

Theorem 1.2. (A0) と (A2) を仮定する．このとき，ある定数 $C>0$ が存在し，すべての $t \ge 0$ と $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$\mathbb{P}\Big(\tau(0,x) - \mathbb{E}[\tau(0,x)] \le -t\|x\|_1^{1/2}\Big) \le e^{-Ct^2}.$$

2 Fluctuations for the shape

この章では，原点 0 からの first passage time が t 以下となるような点の集合

$$B(t) := \left\{ y+h; y \in \mathbb{Z}^d,\, \tau(0,y) \le t,\, h \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d \right\}$$

の漸近挙動について考察する．

(A0) に加え，ある $\alpha > 0$ が存在して $\mathbb{E}[t_e^{1/2+\alpha}] < \infty$ であると仮定する．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して確率 1 で次が成り立つ (詳しくは，[6, (1.9)] 参照): 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\epsilon)B_0.$$

ここで，$B_0 := \{x \in \mathbb{R}^d; \mu(x) \le 1\}$ であり，これを limit shape と呼ぶ．また，上の事実を shape theorem という．この結果に対し，Alexander [2] と Kesten [7] は，$B(t)/t$ が B_0 へ漸近していく rate をより精密に調べ，最大でも $\epsilon = O(t^{-1/2}\log t)$ 程度となることを示した．そこでは，(A0) と (A1) を仮定しているが，Theorem 1.1 を適用することで次のように改良することができる．

Corollary 2.1. (A0) と (A2) を仮定する．このとき，ある定数 C が存在して確率 1 で次が成立する: 十分大きな t に対して，

$$\frac{B(t)}{t} \subset \left\{1 + Ct^{-1/2}(\log t)^{1/2}\right\}B_0. \tag{2.1}$$

さらに，もしある $\alpha > 1+1/d$ に対して $\mathbb{E}[t_e^{\alpha}] < \infty$ が成り立つならば，ある定数 C' が存在して確率 1 で次が成立する: 十分大きな t に対して，

$$\left\{1 - C't^{-1/2}(\log t)^4\right\}B_0 \subset \frac{B(t)}{t}. \tag{2.2}$$

最後に，Corollary 2.1 について，いくつか簡単にコメントしておく．まず (2.1) のために必要な仮定であるが，$d > 4$ のときは shape theorem のものより弱い条件であることに注意しておく．このときは，確率 1 で $\limsup_{\|y\|\to\infty} \tau(0,y) = \infty$ となることが知られている (詳しくは [6, (1.11)] 参照)．この事実より，モーメント条件が悪くなっていくと $B(t)$ は内部に穴が開きやすい状態になっていくことが分かる．(2.1) では，tB_0 という内部に穴が開いていない集合で $B(t)$ を覆っているので，shape theorem のときより弱い

条件の下でも (2.1) を得られる．一方 (2.2) では，tB_0 という内部に穴が開いていない集合を $B(t)$ で覆わなければならないので，$B(t)$ の内部に穴が空かない状況を要求される．そのため，(2.2) では (2.1) より強い仮定が必要となる．さらに，Ahlberg による評価 [1] と Zhang による concentration inequality [8] を使っているため，技術的な問題で shape theorem より若干強い仮定を (2.2) では必要とする．$B(t)$ を内と外から同時に評価する場合，今回の結果においては (2.2) のためのモーメント条件に引っ張られるため，shape theorem の成立条件とは矛盾していない．

参考文献

[1] D. Ahlberg. A hsu-robbins-erdös strong law in first-passage percolation. *The Annals of Probability*, to appear.

[2] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.

[3] J. T. Cox and R. Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4):583–603, 1981.

[4] M. Damron and N. Kubota. Gaussian concentration for the lower tail in first-passage percolation under low moments. arXiv:1406.3105, 2014.

[5] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.

[6] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, Vol. 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[7] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.

[8] Y. Zhang. On the concentration and the convergence rate with a moment condition in first passage percolation. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(7):1317–1341, 2010.